# Teoría de ecuaciones en diferencias

## Definiciones

Una **ecuación en diferencias** de orden p es una ecuación que relaciona los p+1 términos consecutivos de una sucesión.

En forma implícita:



La **solución** de una ecuación en diferencias es una **sucesión de números reales**  tal que satisfagan la ecuación (y las condiciones iniciales, si las hay).



Es a las sucesiones lo que las ecuaciones diferenciales para las funciones de una variable real. De hecho, a menudo aparecen en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales.

Dadas las condiciones iniciales y la ecuación de recurrencia, si la ecuación siempre tiene solución (es decir, si siempre permite encontrar el término enésimo en función de los anteriores), la **solución teórica** siempre existe. No obstante, estaremos interesados en encontrar **soluciones explícitas** (el término general de la sucesión solución, en función de n). No siempre será posible; en lo que queda veremos casos en los que sí se puede encontrar, y las técnicas para ello.

## Casos que tienen solución explícita

### Ecuación lineal de primer orden

Es una ecuación con la siguiente forma:

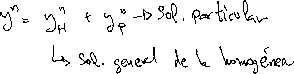


El coeficiente, en general, no es constante.

La **ecuación homogénea** asociada es:



La **solución general** puede escribirse como:



Donde:



se obtiene por el **método de variación de las constantes**. Este método consiste en escribir a como una sucesión a = a(n) e imponer que se satisfaga la ecuación:

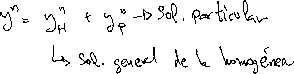


### Ecuación lineal de orden p con coeficientes constantes

Es una ecuación con la siguiente forma:



La **solución general**, como antes, puede escribirse como:



Donde:

tiene una expresión que depende de las raíces del **polinomio característico**.



El **polinomio característico** es



Lo fundamental es que cada raíz, de multiplicidad r, da lugar a r soluciones independientes, y la solución general de la homogénea será la combinación lineal (con coeficientes indeterminados) de todas las p diferentes soluciones.

En función de las raíces, hay dos casos posibles:

* Caso 1: raíz real de multiplicidad r. Las r soluciones que da son:



* Caso 2: raíz compleja conjugada de multiplicidad r. Las 2r soluciones que da son:



Por ser uno de los casos más sencillos, pongamos la solución general de la homogénea cuando hay p raíces reales distintas:



Por su parte, la **solución particular** sólo puede calcularse en determinados casos:



Buscaremos soluciones de la forma:

Donde los son



polinomios de grado (salvo que sea raíz del polinomio característico, en cuyo caso probaremos con polinomios de grado , donde es la multiplicidad de la raíz).



Un caso particular muy frecuente es cuando con r distinto de las raíces del polinomio característico. En ese caso probaremos con

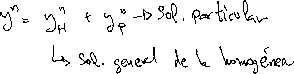


### Sistema lineal de coeficientes constantes

En esta ocasión, la incógnita no es una sucesión de números reales sino una sucesión de vectores. La ecuación general es de esta forma:



La **solución general**, como hasta ahora, es:



Donde:



Para poder dar una expresión más simplificada **diagonalizaremos la matriz** (en caso de que sea posible). Si la matriz A es diagonalizable, esto es, si existe un cambio de base P y una matriz diagonal D tal que



Entonces, las potencias de A son sencillas de calcular:



En concreto, esto quiere decir que, si son los autovalores y los autovectores, la solución general es de la forma siguiente:



Esto viene de escribir el vector de constantes en la base de autovectores.

Nota: Una ecuación lineal de orden p se puede convertir en un sistema lineal de coeficientes constantes haciendo el siguiente cambio:

